

PETER ALBRECHT UND THORSTEN GÖBEL

**Rentenversicherung vs. Fondsentnahmepläne,**

**oder:**

**Wie groß ist die Gefahr, den Verzehr des eigenen  
Vermögens zu überleben?**

## GLIEDERUNG

1. Abgrenzung der Problemstellung.....	2
2. Untersuchungsdesign.....	4
3. Auswertungen für einen 60-jährigen Ruheständler .....	9
4. Auswertungen für einen 70-jährigen Ruheständler .....	14
5. Résumé.....	16
Literatur.....	18
Anhang A: Aktuarielle Grundlagen der Rentenversicherung.....	19
Anhang B: Zur Anwendung der DAV-Sterbetafel 1994 R.....	21
Anhang C: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensver- zehr zu Lebzeiten I.....	22
Anhang D: Analyse des Prozesses der Vermögensentwicklung .....	24
Anhang E: Simulation von korrelierten normalverteilten Zufallsvariablen.....	25
Anhang F: Identifikation der Parameter.....	26
Anhang G: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensver- zehr zu festen Zeitpunkten.....	28
Anhang H: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensver- zehr zu Lebzeiten II.....	29

# Rentenversicherung vs. Fondsentnahmepläne, oder: Wie groß ist die Gefahr, den Verzehr des eigenen Vermögens zu überleben? \*)

von Prof. Dr. Peter Albrecht und Dipl.-Kfm. Thorsten Göbel, Mannheim

## 1. Abgrenzung der Problemstellung

Das Leistungsprofil der Privaten Rentenversicherung in seiner Standardform als Leibrentenversicherung ist gekennzeichnet durch zwei zentrale Garantien. Zum einen ist dies eine biometrische Garantie, die darin besteht, eine lebenslange Zahlung einer Rentenleistung zu gewährleisten. Damit werden finanzielle Folgen einer langen Lebensdauer („Langlebigkeitsrisiko“) vom Versicherungsnehmer auf das Versicherungsunternehmen übertragen. Zum anderen beinhaltet die Leibrentenversicherung eine (nominale) Investmentgarantie in Form der Gewährleistung einer periodischen Mindestrentenzahlung in Höhe der garantierten Rente<sup>1)</sup>. Beide Garantien sind nicht vollständig voneinander zu separieren, denn es wird ceteris paribus einfacher, die lebenslange Zahlung der Rente aufrechtzuerhalten, wenn die Höhe der garantierten Rente geringer ist. Insofern ist für die weitere Analyse sorgfältig abzugrenzen, worin das Evaluationsziel präzise besteht.

Zielsetzung der vorliegenden Studie ist die Evaluation der *biometrischen Garantie*. Dabei gehen wir zum einen von „normalen“ Kapitalmarktverhältnissen aus. In die Studie gehen dabei Investmentfondsdaten aus dem Zeitraum von 1980 – 1997 ein<sup>2)</sup>. In diesem Zeitraum herrschten insoweit normale Verhältnisse, als daß am deutschen Aktienmarkt zwar temporäre Crashes im Rahmen der an Aktienmärkten als normal anzusehenden Schwankungen zu verzeichnen waren, aber keine dauerhaften adversen Entwicklungen etwa infolge des Platzens einer Spekulationsblase oder

---

\*) Schriftliche Ausarbeitung eines Vortrags des ersten Autors am 22. Februar 2000 im Rahmen der 24. Mannheimer Versicherungswissenschaftlichen Jahrestagung.

- 1) Die finanzmathematische Determinante der garantierten Mindestrentenhöhe ist der Rechnungszins 1. Ordnung, d.h. derjenige Rechnungszins, welcher der Prämienkalkulation sowie der planmäßigen Verzinsung der Deckungsrückstellung zugrunde liegt.
- 2) Die Daten für die Investmentfonds wurden uns freundlicherweise vom Bundesverband Deutscher Investmentgesellschaften (BVI) zur Verfügung gestellt.

einer wirtschaftlichen Rezession<sup>3)</sup>. Auch am deutschen Rentenmarkt waren die Verhältnisse in dem Sinne normal, daß die Zinsstruktur sowohl durch Hoch- als auch durch Niedrigzinsphasen sowie entsprechenden Übergangsphasen geprägt war, nicht aber dauerhaft sehr hohe oder sehr niedrige Zinsen herrschten.

Gegenstand der Analyse ist mithin nicht die Evaluation des Wertes der Investmentgarantie unter der Annahme adverser Kapitalmarktentwicklungen. Ebenso wenig geht es um mögliche Konsequenzen einer weiterhin massiven Erhöhung der mittleren Lebensdauer für die in Aussicht gestellte Leistung sowie deren Finanzierung seitens der Versicherungsunternehmen. Zwar ist dies durchaus ein fundamentaler Problembereich im Zusammenhang mit der Privaten Rentenversicherung<sup>4)</sup>, die im weiteren vorgenommene Evaluation wird aber aufgrund ihres komparativen Charakters davon nicht substantiell tangiert. *Insgesamt geht es also um die Evaluation der biometrischen Garantie der Leibrentenversicherung unter Annahme normaler Kapitalmarktverhältnisse sowie konstanter biometrischer Verhältnisse.*

Da ein absoluter Wert der biometrischen Garantie nicht per se existiert, kann das Evaluationsziel nur in der Weise erreicht werden, daß man den gesuchten Wert im Sinne eines Opportunitätsansatzes als Wert einer alternativen Lösung konzipiert. Hierzu wird ein Entnahmeplan auf der Basis einer Kombination von Investmentfonds gewählt. Dabei muß jedoch die Äquivalenz der beiden Alternativen in einer Weise gewährleistet werden, daß nur die finanziellen Auswirkungen der Langlebigkeit einen Einfluß auf die Ergebnisse nehmen. Die Alternative zur Privaten Rentenversicherung ist mithin kein konkreter auf dem Markt befindlicher Fondsentnahmeplan, sondern ein in einer bestimmten, später noch im Detail auszuführenden, Weise äquivalenter Entnahmeplan.

Das zentrale Risiko einer alternativen Fondslösung, das durch den Abschluß einer Privaten Rentenversicherung eliminiert wird, ist die Gefahr eines Vermögensverzehr zu Lebzeiten, bedingt durch die periodischen Vermögensentnahmen zu Zwecken einer regelmäßigen Rentenzahlung. Als ein auch intuitiv gut verständliches Risiko-

---

3) Die Kapitalmarktverhältnisse waren in dieser Periode insgesamt für Aktienfonds im Vergleich zum langfristigen Mittel eher günstig.

4) Vgl. etwa *Blake* (1999).

maß wird in der vorliegenden Studie die Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten als zentrale Evaluationsgröße verwendet.

Abschließend soll noch deutlich gemacht werden, daß die vorliegende Studie auf einer Ex post-Evaluation basiert, auf der Grundlage der Verhältnisse des Zeitraums 1980 – 1997. Die Vornahme einer Ex post-Evaluation ist aus unserer Sicht eine strukturelle Notwendigkeit und zwar aus dem folgenden Grunde. Sowohl für die Fondslösung als auch für die Leibrentenversicherung spielen die Verhältnisse auf den Kapitalmärkten eine entscheidende Rolle hinsichtlich der Leistungsfähigkeit dieser Alternativen. Bei der Fondslösung wird hierdurch die Wertentwicklung des in den Fonds investierten Vermögens bestimmt, bei der Versicherungslösung die durch die Versicherungsunternehmen im Rahmen ihrer Kapitalanlage erwirtschaftbaren Renditen, die wiederum einen zentralen Einfluß auf die vom Versicherer realisierbaren Leistungen haben. Die künftigen Entwicklungen auf den Kapitalmärkten sind unsicher, ebenso wie ihre Auswirkungen auf die Versicherungs- bzw. Fondslösung. Ein Vergleich dieser beiden Alternativen würde damit unkontrollierbaren Einflüssen unterliegen. Für die vergangene Periode 1980 – 1997 kennen wir jedoch sowohl die Verhältnisse auf den Kapitalmärkten als auch ihre Auswirkungen auf die Leistungsfähigkeit der Investmentfonds sowie der Versicherungsunternehmen. Dies ermöglicht einen tragfähigen Vergangenheitsvergleich, der dann zugleich eine aussagefähige Basis für die zukünftige Beurteilung der beiden alternativen Lösungen sein kann. Zwar bleibt es unsicher, welche präzise Leistungskraft die beiden Alternativen zukünftig bei isolierter Betrachtung entfalten werden. Jedoch sollte die Leistungsfähigkeit der Alternativen in Relation zueinander beim Beschreiten der Brücke von der Vergangenheit in die Zukunft nicht substantiell tangiert werden.

## **2. Untersuchungsdesign**

Ausgangspunkt ist ein(e) Investor(in), die im weiteren einprägsamer als Ruheständler(in) bezeichnet werden soll, wodurch der Entscheidungskontext bedingt durch eine spezifische Lebenssituation betont wird. Die Person ist charakterisiert durch ein bestimmtes Lebensalter, z.B. 60 oder 70 Jahre, und sie verfügt über ein bestimmtes Volumen an Altersvorsorgekapital. Diese Konzentration auf die Einmalbeitragssituation erfolgt bewußt, denn durch diese Annahme wird von der Art und Weise der Ge-

nerierung des Altersvorsorgekapitals (z.B. : über eine Lebensversicherung oder einen Investmentfonds) abstrahiert. Die unterschiedlichen Rendite/Risikoprofile<sup>5)</sup> alternativer Produkte hinsichtlich der Vermögensbildungsphase wie auch der unterschiedliche Entscheidungskontext eines Investors in dieser Phase sollen nicht zu einer Überlagerung des eigentlichen Untersuchungsziels führen. Weiterhin bleiben steuerliche Aspekte ausgeblendet.

Das verwendete Altersversorgungsprodukt dient der Finanzierung periodischer Alterseinkünfte zur Wahrung eines gewünschten Lebensstandards für die restliche Lebensdauer. Im Falle eines Selbständigen kann die vorgenommene Investition durchaus seiner Gesamtversorgung im Alter dienen, im Falle beispielsweise von Arbeitern und Angestellten beinhaltet sie eine notwendige Zusatzversorgung zu Ansprüchen aus der gesetzlichen Rentenversicherung.<sup>6)</sup> Die ins Auge gefaßten Alternativen bestehen im Abschluß einer Privaten Rentenversicherung einerseits oder alternativ in einem Investmentfonds-Entnahmeplan andererseits. Um die Vergleichbarkeit der beiden Alternativen zu gewährleisten, soll die Höhe der periodischen Entnahmen aus dem Fonds derjenigen der Leibrente entsprechen.

Entscheidet sich der Ruheständler für eine Private Leibrentenversicherung, so erhält er im hier betrachteten Standardfall<sup>7)</sup> eine periodische Rente einer bestimmten im Zeitablauf fixen Höhe  $R$ . Charakteristisch für den Fall einer Leibrentenversicherung ist dabei, daß die vereinbarte Rentenzahlung bis an das jeweilige, zufallsabhängige Lebensende des Berechtigten garantiert wird. Das Versicherungsunternehmen übernimmt im Rahmen das Langlebkeitsrisiko des Ruheständlers.

Dabei ist bei der weiteren Analyse in geeigneter Weise zu berücksichtigen, daß die periodische Leibrente der Höhe  $R$  nicht in voller Höhe garantiert ist, sondern sich

---

5) Vgl. *Albrecht/Maurer/Schradin* (1999).

6) Aus finanzwirtschaftlicher Perspektive handelt es sich bei den Leistungen aus der gesetzlichen Rentenversicherung ebenfalls um Leibrenten, vgl. *Maurer/Schradin* (1997, S. 95 f.) sowie *Schwebler* (1988, S. 649 f.).

7) Alternativ sind natürlich auch andere Ausgestaltungsformen der Entwicklung der Rentenhöhe denkbar, vgl. aktuell *Meyer* (1999, S. 14 f.). Aus einer kalkulatorischen Perspektive sind diese Varianten jedoch aktuariell äquivalent, so daß hieraus keine systematisch andersartigen Ergebnisse hinsichtlich der Gefahr eines Vermögensverzehr zu Lebzeiten resultieren sollten; vgl. zu den Varianten aus aktuarieller Sicht etwa *Wolfsdorf* (1997, S. 123 ff.).

diese Summe aus einer garantierten Rentenhöhe sowie einer von der Überschußbeteiligung abhängigen Rentenhöhe zusammensetzt. Die von der Überschußbeteiligung abhängige Teilrente wird zwar so kalkuliert, daß sie über die Vertragslaufzeit mit hoher Wahrscheinlichkeit konstant gehalten werden kann, aber dauerhaft adverse Entwicklungen auf den Kapitalmärkten könnten hier eine Änderung gegenüber der Kalkulation erzwingen.

Die vom Versicherungsunternehmen darstellbare Rentenhöhe ist von den folgenden zentralen Faktoren abhängig:

- 1) Dem Volumen an zu verrentendem Kapital (Bruttoeinmalprämie).
- 2) Den der Kalkulation zugrunde gelegten biometrischen Verhältnissen. Im Rahmen der Evaluation gehen wir dabei von der aktuellen DAV-Sterbetafel 1994 R aus<sup>8)</sup>, um die biometrischen Rahmenbedingungen für die Zwecke unserer Arbeit zu fixieren.
- 3) Dem Rechnungszins 2. Ordnung, d.h. demjenigen Rechnungszins, welcher der Kalkulation der in Aussicht gestellten gesamten Rentenhöhe zugrunde liegt. Der Rechnungszins 2. Ordnung ist wiederum abhängig von der Kapitalmarktentwicklung zum einen – hier nehmen wir, wie bereits angeführt, die Verhältnisse des Zeitraums 1980 – 1997 als Ausgangspunkt –, zum anderen aber auch wesentlich von der Qualität des Anlagemanagements des die Rentenpolice anbietenden Versicherungsunternehmens. Zur Erfassung einer möglichen unterschiedlichen Überschußkraft seitens des Versicherers nehmen wir eine Variation des Rechnungszinses 2. Ordnung im Rahmen von 4 % - 7 % vor. Dies erlaubt u.E. auch die Abdeckung der Problematik, daß die in Aussicht gestellte Rentenhöhe nicht in voller Höhe garantiert ist. Eine Reduktion der Rentenhöhe ist im Modell erfaßbar durch den Übergang zu einem niedrigeren Rechnungszins 2. Ordnung.
- 4) Der Kostenstruktur des Versicherungsunternehmens; hierbei gehen wir bei der späteren Evaluation aus von  $\nabla$ -Kosten in Höhe von 4 % des Bruttoeinmalbei-

---

8) Präzise gehen wir aus von der Basistafel 2000, d.h. nehmen an, daß der Ruheständler eines bestimmten Alters dieses exakt im Jahr 2000 erreicht. Vgl. im Detail die Darstellung in Anhang B.

trags,  $\exists$ -Kosten in Höhe von 1,25 % des Bruttoeinmalbeitrags sowie  $\gamma$ -Kosten in Höhe von 1,5 % der Rentenhöhe R pro Jahr Rentenbezugszeit. Nach unseren Informationen entspricht dies einer marktüblichen Dimension der Kostengrößen.

Der präzise kalkulatorische Zusammenhang zwischen der in Aussicht gestellten fixen Rentenhöhe R und den vorstehenden Determinanten ist in Anhang A dargestellt, dabei konzentrieren wir uns für die Zwecke der Evaluation auf den Fall *vorschüssiger Rentenleistungen auf Jahresbasis*.

Als Alternative hat der Ruheständler die Möglichkeit, das vorhandene Altersvorsorgekapital in einen oder mehrere Investmentfonds zu investieren. Hierzu wird im weiteren von einer bestimmten Kombination aus einem Aktien- und einem Rentenfonds ausgegangen. Dabei sind auch die Extremfälle einer 100%igen Aktien- bzw. Rentenfondsanlage zugelassen. Die resultierende Vermögensentwicklung der gewählten Investmentfonds hängt von den folgenden Faktoren ab:

- *Der Kapitalmarkt- bzw. Fondsentwicklung:* Um einen Indikator für repräsentative Investitionsverhältnisse zu gewinnen, werden dabei derjenige Aktienfonds und derjenige Rentenfonds aus einer Grundgesamtheit ausgewählt, der hinsichtlich der durchschnittlichen Wertentwicklung über die Periode 1980 – 1997 die mittlere Position innehatte (*Median-Aktien- bzw. -Rentenfonds*).<sup>9)</sup> Die Kursentwicklungen von Median-Aktien- und -Rentenfonds über den Zeitraum von 1980 – 1997 bilden wiederum den Ausgangspunkt für die statistische Identifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit<sup>10)</sup> der Wertentwicklung repräsentativer Investitionsverhältnisse, die

---

9) Die Grundgesamtheit besteht dabei aus jeweils allen dem BVI angeschlossenen Fonds, die während des gesamten Untersuchungszeitraums von 1980 – 1997 existiert haben, es sind dies 17 Aktien- und 23 Rentenfonds (jeweils auf eine äquivalente thesaurierte Form gebracht), vgl. hierzu auch *Albrecht/Maurer/Schradin* (1999).

10) Zu Zwecken der *zuverlässigen* Bestimmung der relevanten Wahrscheinlichkeiten wird somit nicht auf eine „historische Simulation“ und damit auf einen einzigen (den beobachteten) Entwicklungspfad zurückgegriffen, sondern die Wahrscheinlichkeiten werden *konsistent* zur Zufallsgesetzmäßigkeit der Dynamik der Kursentwicklung der Fonds bestimmt. Die Methode der Monte Carlo-Simulation kommt dabei zum Zuge, da die betreffenden Wahrscheinlichkeiten nicht in analytisch geschlossener Form ermittelt werden können. Eine hinreichend hohe Zahl von Simulationen (in der Evaluation wurden 100 000 Simulationsläufe durchgeführt) sowie eine Initialisierung der Zufallszahlentafel stellt sicher, daß hieraus keine systematischen Verzerrungen hinsichtlich der ermittelten Wahrscheinlichkeiten resultieren. Die angenommene Zufallsgesetzmäßigkeit ist dabei diejenige einer zweidimensionalen (zur Berücksichtigung der Korrelation zwischen Aktien- und Rentenanlage) geometrischen *Brownschen* Bewegung (dies beinhaltet insbesondere logarithmisch normalverteilte Kurszuwächse), einem finanzmathematischen Standardmodell.

ihrerseits unter Benutzung der Methode der Monte Carlo-Simulation einen der zentralen Pfeiler für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten bildet.

- *Der realisierten Portfeuille-Mischung:* Bei der Durchführung der Evaluation erfolgte dabei eine Variation in 5 %-Schritten hinsichtlich der Investitionsanteile, d.h. es werden die folgenden Mischungen betrachtet: 0 % Aktien/100 % Renten, 5 % Aktien/95 % Renten, 10 % Aktien/90 % Renten, ..., 95 % Aktien/5 % Renten, 100 % Aktien/0 % Renten.
- *Der Kostenstruktur der Fonds:* Die Hauptkostenarten, die bei einem Fondsinvestment hier eine Rolle spielen, sind die Verwaltungsgebühren und die Ausgabeaufschläge. Die Verwaltungsgebühren (in % des Anteilswertes) sind dabei standardmäßig eingerechnet in die Rücknahmepreise, d.h. sind in den analogisierten Fonds-Renditezeitreihen bereits berücksichtigt. Die Ausgabeaufschläge (in % des Anlagebetrages) hingegen sind explizit anzusetzen, für den Aktienfonds haben wir hierbei einen marktüblichen Kostensatz in Höhe von 5 %, für den Rentenfonds einen Kostensatz in Höhe von 3 % angenommen.
- *Dem Modus und der Höhe der Rentenentnahme:* Hierbei ist die Äquivalenz zur Versicherungslösung entscheidend, nur durch diese Annahme lassen sich die beiden Alternativen vergleichbar machen<sup>11)</sup> und es spielen keine weiteren Determinanten außer dem Langlebigkeitsrisiko noch eine Rolle.

---

11) Wie bereits ausgeführt, ist es somit nicht das Ziel der Evaluation, für einen real angebotenen Fondsentnahmeplan die Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten zu bestimmen. Dies wäre allerdings auch nicht weiter problematisch, wenn der Entnahmeplan auf eine Zeitrente hinausläuft, d.h. der Verzehr des Fondskapitals über einen vorher festgelegten Zeitraum T erfolgt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten entspricht dann direkt der auf Basis einer Sterbetafel unschwer zu ermittelnden Wahrscheinlichkeit, daß der Investor diesen Zeitraum überlebt (T-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit). Dies wäre u.E. aber keine geeignete Vergleichsbasis, da die Entnahmehöhen im Vergleich zum Versicherungsfall unterschiedlich sind. Dies gilt auch bei Fondsentnahmeplänen, die das Langlebigkeitsrisiko dadurch eliminieren, daß sie nur die erwirtschafteten Zinsen entnehmen, das Stammkapital aber unangetastet lassen. Eine (für praktische Zwecke) alternative Vorgehensweise besteht darin, eine bestimmte geringe (etwa 1 %) tolerierte Vermögensverzehrswahrscheinlichkeit für die Fondslösung vorzugeben, diejenige Rentenhöhe zu bestimmen, deren periodische Entnahme zu einer entsprechend geringen Wahrscheinlichkeit führt und diese Rentenleistung mit derjenigen der Versicherungslösung zu vergleichen. Die in der vorliegenden Arbeit verfolgte hierzu duale Vorgehensweise der Fixierung der Rentenhöhe mit entsprechenden Konsequenzen für die Vermögensverzehrswahrscheinlichkeit erscheint uns jedoch naheliegender, da sie die zentrale Leistung der Versicherungslösung, die Übernahme des Langlebigkeitsrisikos, direkt evaluiert.

Die gewählte Vorgehensweise beinhaltet – dies wurde bereits in Abschnitt 1 angedeutet – eine strukturelle Neutralisierung der Konsequenzen der (unsicheren) weiteren Entwicklung der mittleren Lebensdauer für die Zwecke der Arbeit. Eine (massive) Erhöhung der mittleren Lebensdauer im Vergleich zur kalkulatorisch angesetzten könnte bei der Versicherungslösung – allerdings erst nach Aufzehrung der entsprechenden Sicherheitspolster (kalkulatorische Sicherheitszuschläge in den Sterbetafeln, Möglichkeiten einer Nachreservierung) – zu einer *Verminderung der Rentenhöhe* (im Bereich des nicht-garantierten Teils) führen. Im Falle der Fondslösung würde hingegen die Erhöhung der mittleren Lebensdauer bei fixierter Rentenhöhe entsprechend eine *Erhöhung der Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten* implizieren. Die relative Leistungskraft der alternativen Lösungen sollte daher von einer Erhöhung der mittleren Lebensdauer unberührt bleiben.

Als zentrale Evaluationsgröße dient im weiteren die Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten für eine „versicherungsäquivalente“ (in dem zuvor erläuterten Sinne) Fondslösung. Die Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit gestaltet sich jedoch komplex und aufwendig. Die entsprechenden Grundlagen und Ableitungen sind in den Anhängen C – H dargestellt.

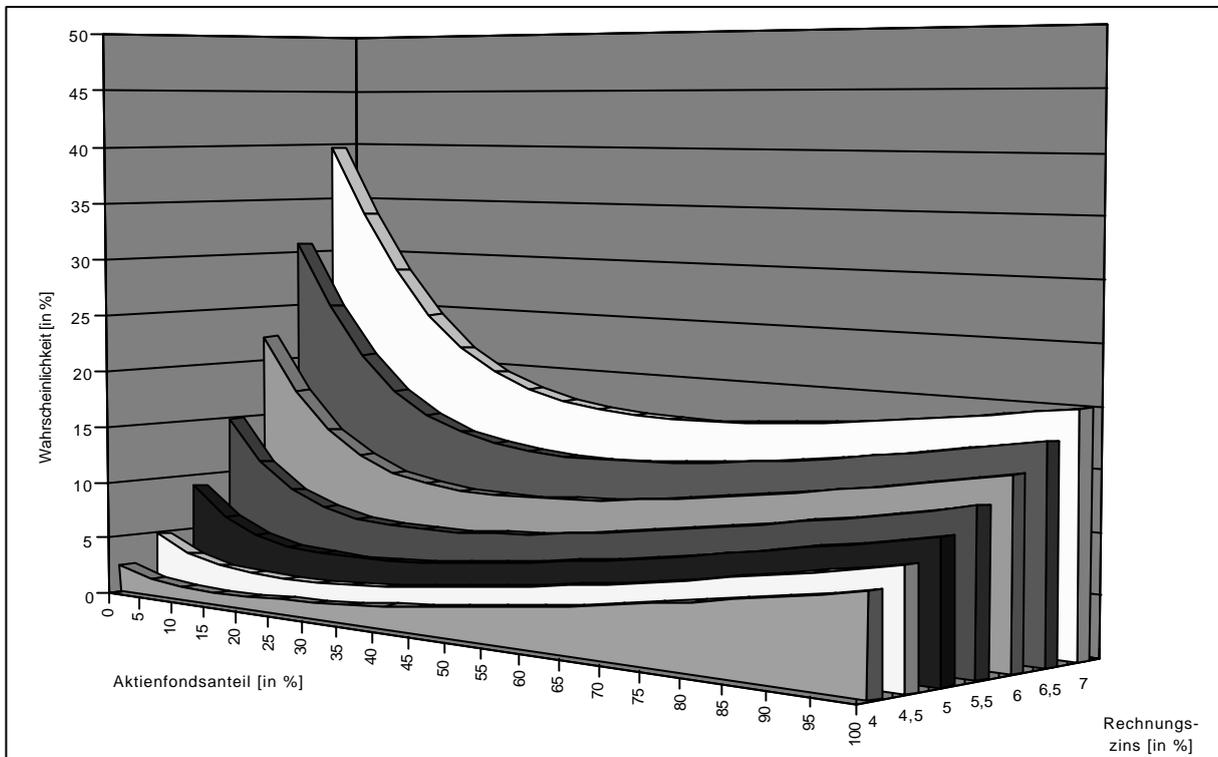
### **3. Auswertungen für einen 60-jährigen Ruheständler**

Die zentral interessierende Evaluationsgröße ist die Wahrscheinlichkeit eines Vermögensverzehrs zu Lebzeiten

- für einen spezifischen Investor
- bei einem bestimmten Fondsinvestment
- bei einer bestimmten Höhe der versicherungsäquivalenten Rentenentnahme.

Der Investor wird spezifiziert durch Eintrittsalter (im folgenden: 60 Jahre), Geschlecht (im folgenden: männlich) und durch die angenommene Sterbegesetzmäßigkeit (im folgenden: Basistafel 2000). Das Fondsinvestment bestehe – wie bereits ausgeführt – aus alternativen prozentualen Mischungen (0/100, 5/95, ... , 95/5, 100/0) aus repräsentativen Aktien- und Rentenfonds. Die versicherungsäquivalente Rentenhöhe wird im folgenden repräsentiert durch den Rechnungszins 2. Ordnung. Dieser wird im weiteren im Rahmen einer Bandbreite von 4 % - 7 % mit Schritten in Höhe von 0,5

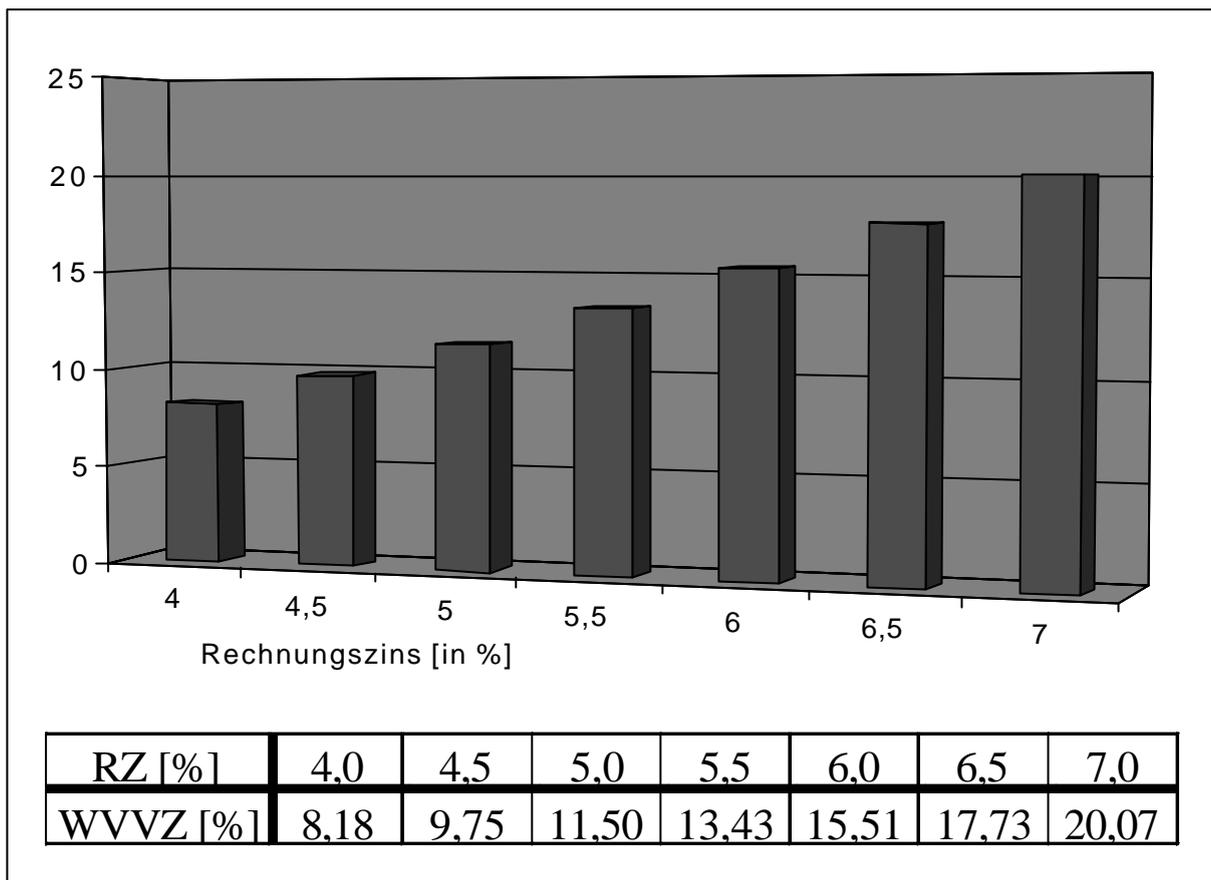
Prozentpunkten variiert, um eine (zunächst theoretische) Differenzierung einer unterschiedlichen Überschußkraft der die Rentenpolice anbietenden Versicherungsunternehmen im Rahmen der Analyse zu ermöglichen. Die Ergebnisse der entsprechenden Berechnungen sind zunächst in ihrer Gesamtheit in Abbildung 1 festgehalten.



**Abbildung 1:** Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten (60-jähriger Investor)

Abbildung 1 vermittelt einen gesamthaften Einblick in den Einfluß, den eine Variation der Fondsmischung einerseits sowie eine Variation der Höhe des Rechnungszinses 2. Ordnung andererseits (bzw. äquivalent der Überschußkraft des die Rentenpolice anbietenden Versicherers) auf die Vermögensverzehrswahrscheinlichkeiten nimmt. Zur Gewinnung spezifischer Erkenntnisse werden im folgenden ausgewählte Teilaspekte der Evaluation fokussiert.

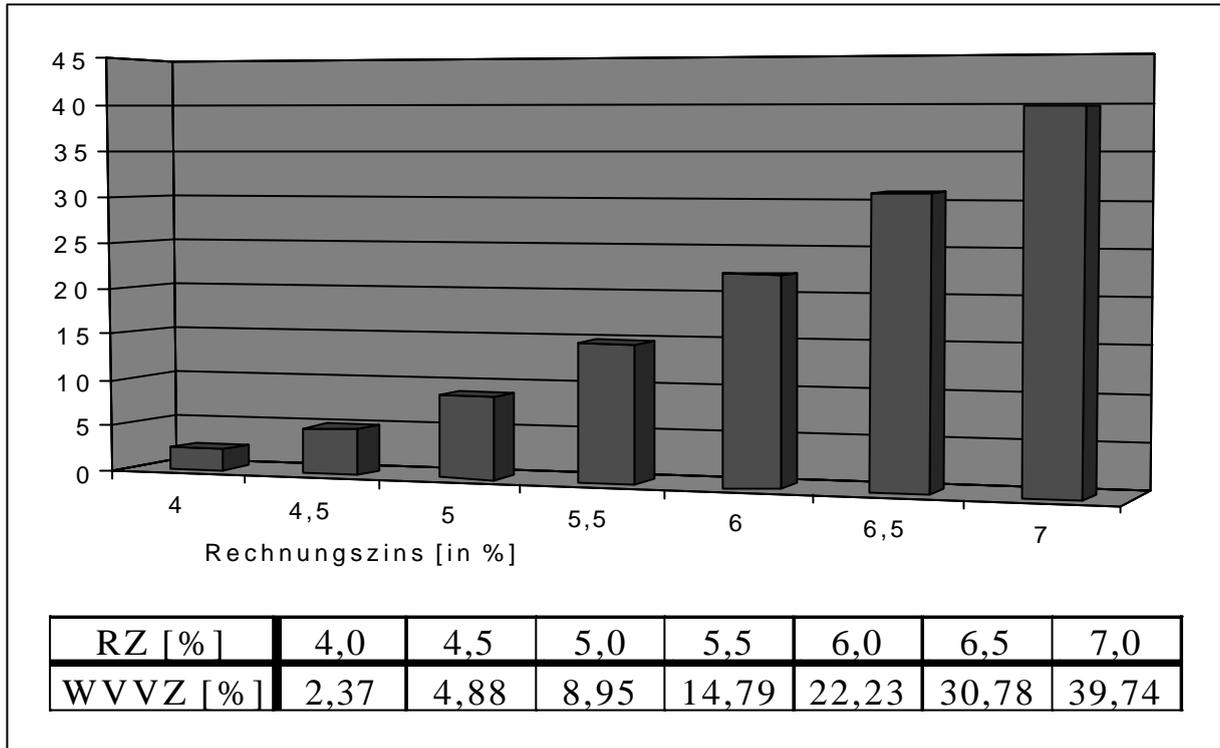
Hierzu betrachten wir zunächst den Spezialfall einer 100 %-igen Investition in einen repräsentativen Aktienfonds. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten sind in Abhängigkeit von der Höhe des Rechnungszinses 2. Ordnung in nachfolgender Abbildung 2 enthalten.



**Abbildung 2:** Ausgewählte Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr (60-jähriger Investor, 100 % Aktien)

Die Abbildung macht deutlich, daß eine 100 %-ige Investition des Altersversorgungskapitals in Aktienfonds über das gesamte Spektrum der angenommenen Rechnungszinsen 2. Ordnung durchwegs zu substantiellen Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten führt.

Als zweiten Spezialfall betrachten wir eine jeweils 100 %-ige Investition in einen repräsentativen Rentenfonds. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten, wiederum in Abhängigkeit von der Höhe des Rechnungszinses 2. Ordnung, sind in Abbildung 3 enthalten.



**Abbildung 3:** Ausgewählte Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr (60-jähriger Investor, 100 % Renten)

Interessanterweise sind ab einem Rechnungszins 2. Ordnung in Höhe von 5,5 Prozentpunkten die Vermögensverzehrswahrscheinlichkeiten bei einer 100 %-igen Investition in den Rentenfonds sogar noch höher als bei 100 %-iger Investition in den Aktienfonds. Dies lässt sich wie folgt erklären. Die Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr bei einer Fondsanlage hängt ab von

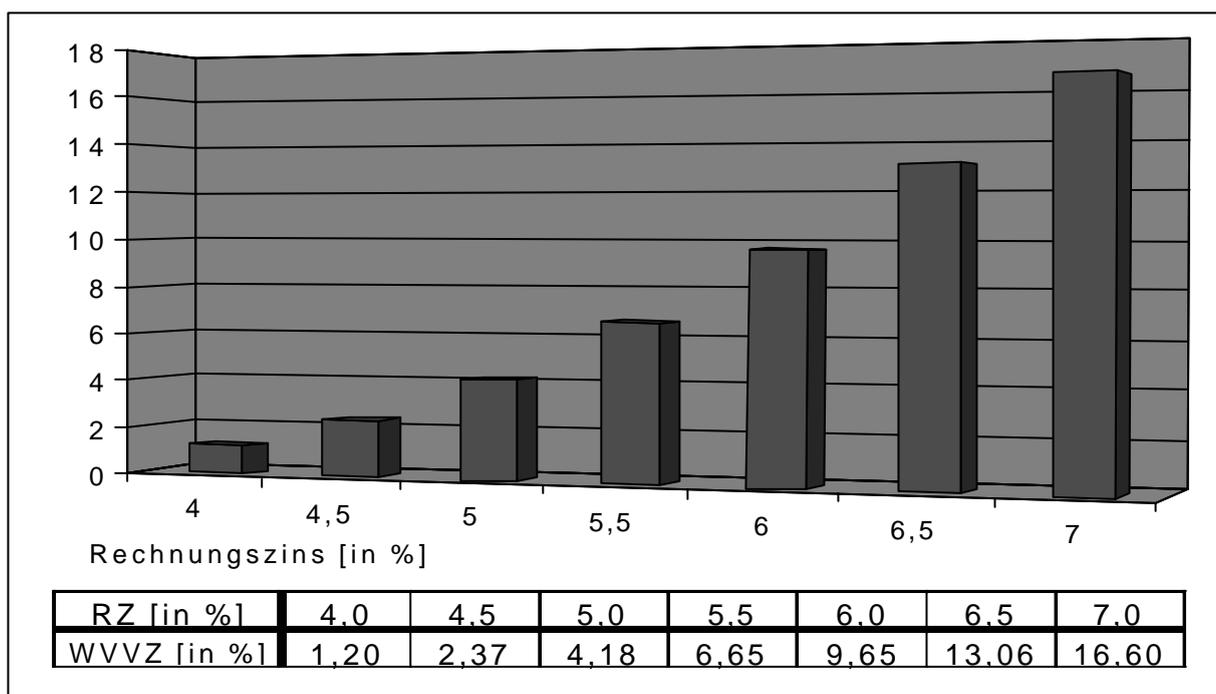
- der mittleren Wertentwicklung des Fonds
- dem Ausmaß der Schwankungen um diese mittlere Wertentwicklung (Volatilität)
- der Höhe der Rentenentnahme (Höhe der versicherungsäquivalenten Rente repräsentiert durch den Rechnungszins 2. Ordnung).

Im Falle des Aktienfonds wird das Risiko für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten dominiert durch das Eigenrisiko (Volatilität) des Fonds. Im Falle des vergleichsweise deutlich weniger volatilen Rentenfonds wird die Vermögensverzehrswahrscheinlichkeit dagegen sehr viel stärker bestimmt von der mittleren Wertentwicklung des Fonds und weniger von dessen Volatilität. Ab einer Rentenannahme, die repräsentierbar ist durch einen Rechnungszins 2. Ordnung in Höhe von 5,5 %, ist somit – zumindest im

Hinblick auf die Vermögensverzehrswahrscheinlichkeit – eine 100 %-ige Anlage in einen Rentenfonds ungünstiger relativ zur 100 %-igen Anlage in einen Aktienfonds. Die Höhe der Rentenentnahme impliziert kompetitive Vorteile der riskanteren, aber renditestärkeren Investitionsalternative.

Im Falle von niedrigeren Rentenentnahmen, repräsentiert durch Rechnungszinsfüße 2. Ordnung in Höhe von 4,0 % - 5,0 % kehren sich die Verhältnisse dagegen um, die weniger riskante und renditeschwächere Anlage gewinnt an Kompetitivität. Dies gilt auch hinsichtlich der Höhe der Vermögensverzehrswahrscheinlichkeit, die bei einem Rechnungszins 2. Ordnung in Höhe von 4,0 % nicht mehr sehr substantiell ist. Es ist allerdings darauf hinzuweisen, daß die vorgenommene Differenzierung der Rechnungszinsen 2. Ordnung zunächst eine theoretische ist, nicht eine empirische Aussage hinsichtlich der bei Versicherungsunternehmen in dem Zeitraum von 1980 – 1997 anzutreffenden Verhältnisse, hierauf kommen wir im weiteren Verlauf der Studie noch zurück.

Die dritte Teilevaluation konzentriert sich auf die wiederum in Abhängigkeit vom gewählten Rechnungszins 2. Ordnung resultierende *risikominimale* Fondsmischung, d.h. die in diesem Sinne bestmögliche Alternative zum Abschluß einer Privaten Rentenversicherung. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abbildung 4 dargestellt.



**Abbildung 4:** Minimale Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr (60-jähriger Investor)

Die in Abbildung 4 enthaltenen Ergebnisse machen zunächst deutlich, daß die Höhe der periodischen Rentenentnahme und damit die Stärke der Überschußkraft des die Rentenpolice anbietenden Versicherungsunternehmens die zentrale Determinante im Hinblick auf eine substantielle Größenordnung der Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten ist. Im Bereich eines Rechnungszinses 2. Ordnung in der Größenordnung von 4,0 % - 4,5 % ist die Vermögensverzehrswahrscheinlichkeit eher gering<sup>12)</sup>, im Bereich von 6,0 % - 7,0 % dagegen substantiell.

An dieser Stelle muß die bisherige theoretische Differenzierung der Rechnungszinsen den empirischen Verhältnissen in der Zeitperiode von 1980 - 1997 gegenübergestellt werden. Entscheidender Einflußfaktor für die Höhe des der Rentenkalkulation zugrundegelegten Rechnungszinses 2. Ordnung ist die langfristig erzielbare Rendite aus der Kapitalanlage des anbietenden Versicherungsunternehmens. Nach der Studie von *Albrecht/Maurer/Schradin* (1999, S. 49) nahm im Marktdurchschnitt der Versicherungsunternehmen die mittlere Kapitalanlagerendite (Nettoverzinsung) in der Zeitperiode von 1980 – 1997 einen Wert von 7,71 % an. Der Markt ist hierbei durch eine große Homogenität gekennzeichnet. Unter den im Rahmen der Studie untersuchten dreißig größten deutschen Lebensversicherern wies derjenige mit der geringsten mittleren Nettoverzinsung über diesen Zeitraum einen Wert von 7,34 % auf.<sup>13)</sup>

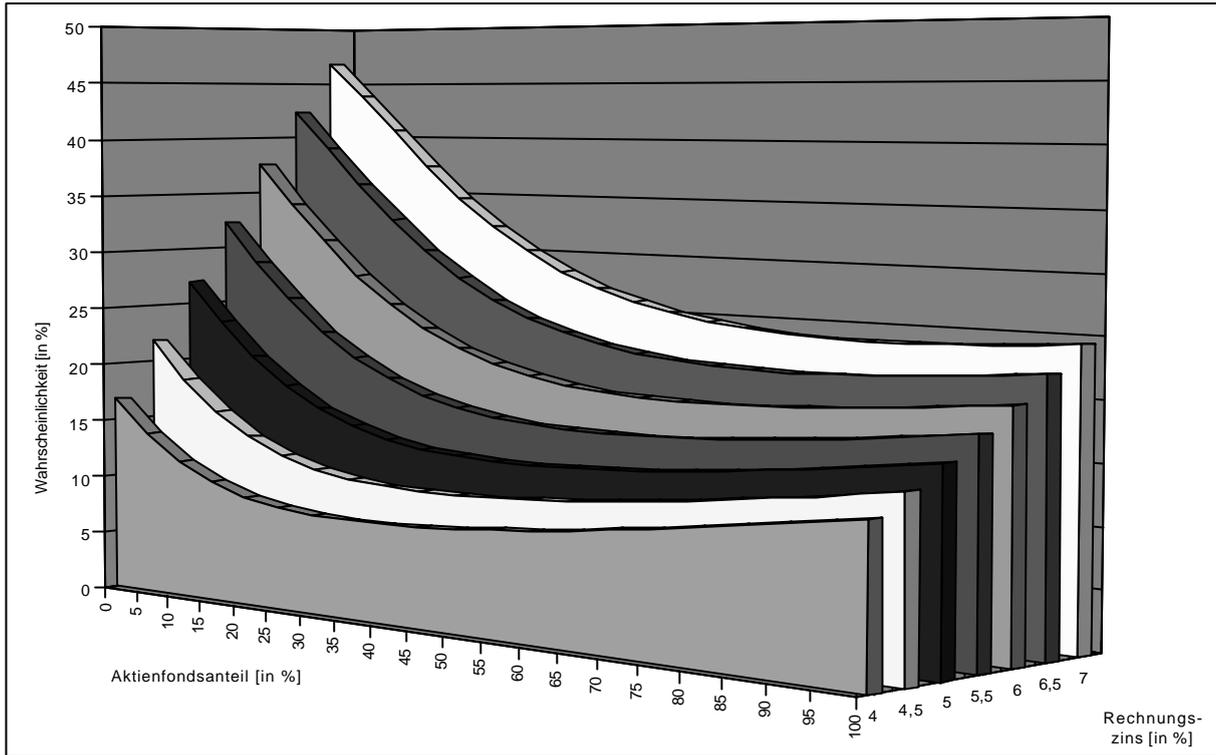
#### **4. Auswertungen für einen 70-jährigen Ruheständler**

Wie im Fall eines 60-jährigen Ruheständlers soll zunächst wiederum ein gesamthafter Überblick über die Vermögensverzehrswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Fondsmischung einerseits und dem Rechnungszins 2. Ordnung andererseits gegeben werden. Dies erfolgt in Abbildung 5.

---

12) Dies bedeutet, daß eine Rentenzahlung allein in ihrer garantierten Höhe nicht kompetitiv zu einer alternativen Fondslösung ist.

13) Vgl. *Albrecht/Maurer/Schradin* (1999, S. 107).

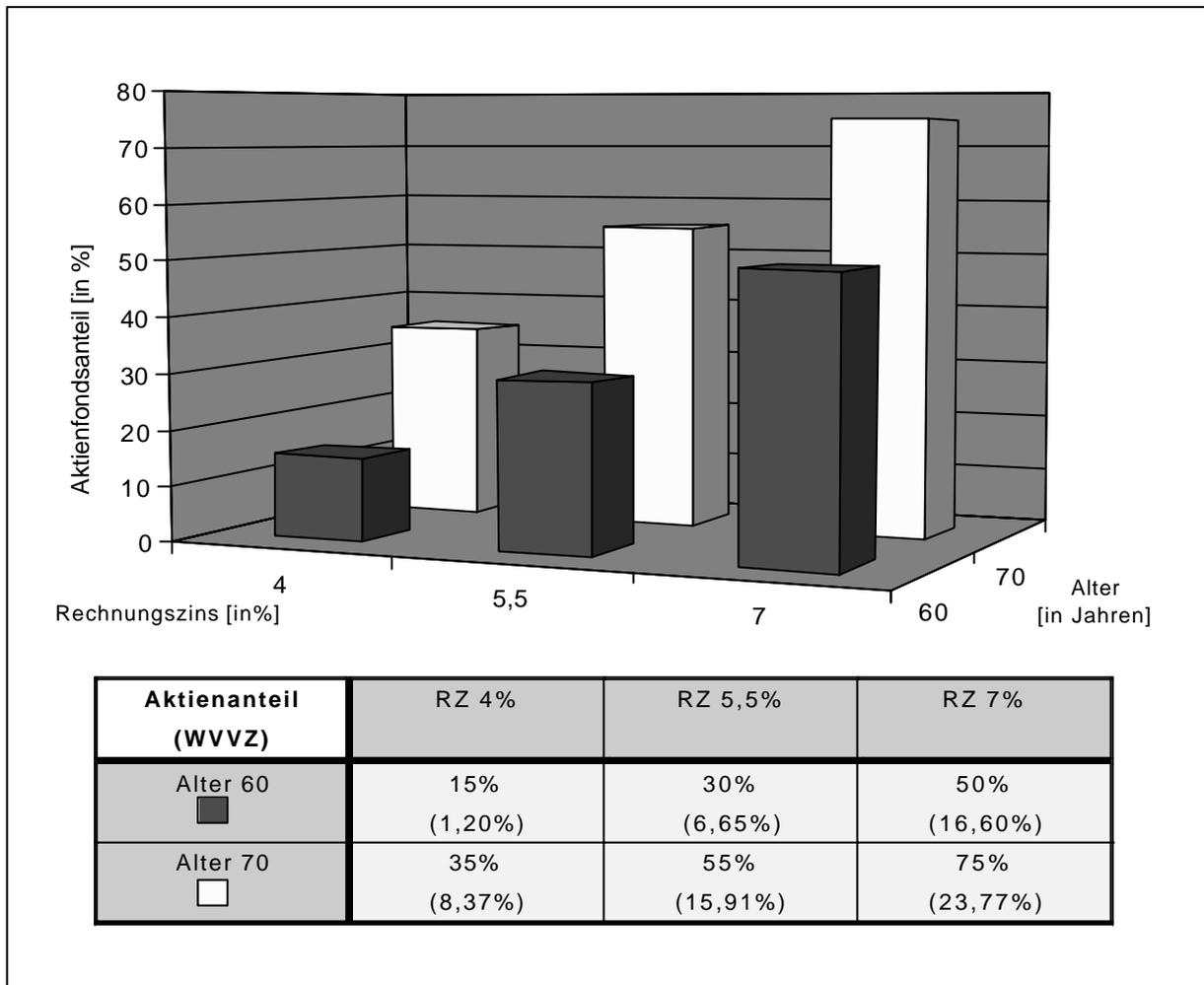


**Abbildung 5:** Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten (70-jähriger Investor)

Insgesamt fällt auf, daß die betreffenden Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten ein uniform höheres Niveau im Vergleich zu dem Fall des 60-jährigen Ruheständlers annehmen. Dieser Effekt soll nun im Rahmen einer Teilevaluation der jeweiligen in Termen der Vermögensverzehrswahrscheinlichkeit risikominimalen Mischung näher untersucht werden. Die Abbildung 6 stellt zu diesem Zweck für drei ausgewählte Rechnungszinsfüße 2. Ordnung in Höhe von 4,0 %, 5,5 % und 7,0 % die minimalen Vermögensverzehrswahrscheinlichkeiten einerseits sowie die damit verbundenen Aktienfondsanteile für die Fälle eines 60-jährigen bzw. 70-jährigen Investors gegenüber.

Es zeigt sich deutlich, daß unabhängig vom gewählten Rechnungszins 2. Ordnung in der risikominimalen Konstellation jeweils eine Erhöhung der Aktienquote erfolgt. Offenbar erzwingt die Höhe der versicherungsäquivalenten Rente aufgrund der kürzeren restlichen Lebensdauer des 70-jährigen Ruheständlers jeweils ein höheres Engagement in das ertragsstärkere Investment der Aktienfonds. Damit geht allerdings jeweils auch ein höheres Risikoniveau einher. Der 70-jährige Ruheständler nimmt s

bei einer versicherungsäquivalenten Fondslösung durchwegs substantielle Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten in Kauf.



**Abbildung 6:** Minimale Vermögensverzehrswahrscheinlichkeiten (60-jähriger sowie 70-jähriger Ruheständler)

## 5. Résumé

Zentrales Resultat der durchgeführten Analysen ist, daß im Vergleich zu einem Versicherungsunternehmen mit „marktüblicher Überschußkraft“ der Ruheständler bei einer „versicherungsäquivalenten“ Fondslösung substantielle Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten in Kauf nimmt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß primär der Risikoaspekt im Vordergrund stand. Mögliche unterschiedliche Ertragsimplikationen (Mehrentnahmen, Vererbungspotentiale) sowie die grundsätzlich höhere Flexibilität von Investmentfonds blieben unberücksichtigt.

Unseres Erachtens kann man im Rahmen der privaten Altersversorgung zwei Teilbereiche unterscheiden, denjenigen einer *Basissicherung* sowie denjenigen einer *Zusatzsicherung*. Die Basissicherung dient dabei der Gewährleistung eines *Mindest-Lebensstandards* für die restliche Lebensdauer, der Umfang der Basissicherung ist dabei sowohl abhängig von den individuellen Versorgungsverhältnissen (z.B. bereits vorhandene gesetzliche oder betriebliche Altersversorgung) sowie von der individuellen Risikotoleranz. Für die solchermaßen individuell definierte Basissicherung zur Wahrung eines Mindest-Lebensstandards sollte der Sicherheitsgedanke im Vordergrund stehen<sup>14)</sup>, so daß in diesem Teilbereich der privaten Altersversorgung eine ausschließliche Konzentration auf den Risikoaspekt in der Tat als sinnvoll erscheint. Zur Gewährleistung einer solchermaßen definierten Basissicherung ist im Falle der Verrentung eines angesparten Altersvorsorgekapitals zu Zwecken der Finanzierung periodischer Alterseinkünfte der Abschluß einer Privaten Rentenversicherung eine adäquate Lösung.

Aufbauend auf einer gewährleisteten Basissicherung unterliegt die Zusatzsicherung der Zielsetzung einer weiteren Erhöhung des Lebensstandards. In dem solchermaßen definierten Teilbereich der privaten Altersversorgung rücken *Effizienzgesichtspunkte* in den Vordergrund. Hierbei spielen sowohl Risiko- als auch Ertragsaspekte eine Rolle, wobei die Realisierung einer maximalen mittleren Rendite im Rahmen eines tolerierten Risikoniveaus angestrebt wird. Auch sind hierbei neben den betrachteten Versicherungs- und Investmentprodukten weitere Altersversorgungsinstrumente, wie etwa das selbst genutzte Wohnungseigentum, zu inkorporieren.<sup>15)</sup>

Wie ein unter Ertrags- und Risikoaspekten individuell effizientes Altersversorgungsportefeuille ausgestaltet werden sollte, ist aus wissenschaftlicher Sicht allerdings ein bisher nur rudimentär behandelter Themenkomplex.<sup>16)</sup> Es ist in dieser Hinsicht somit noch ein erheblicher Forschungsbedarf zu konstatieren.

---

14) Dies wird auch durch eine empirische Untersuchung des *Instituts für Demoskopie Allensbach* (1996) bestätigt.

15) Vgl. etwa *Schmähl* (1999).

16) Erste Ergebnisse finden sich in *Albrecht/Maurer/Schradin* (1999, S. 86 ff.). Hier wurden auf der Basis einer *Markowitz*-Portfolioanalyse effiziente Altersversorgungsprogramme aus Versicherungs- und Investmentprodukten bestimmt.

## LITERATUR

- Albrecht, P., R. Maurer, H.R. Schradin* (1999): Die Kapitalanlageperformance der Lebensversicherer im Vergleich zur Fondsanlage unter Rendite- und Risikoaspekten: Eine empirische Studie mit Folgerungen für Alterssicherung und Vorsorgebedarf, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 1999.
- Blake, D.* (1999): Annuity Markets: Problems and Solutions, Geneva Papers on Risk and Insurance 24, S. 358-375.
- Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen* (1995): Neue Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung mit Erlebensfallcharakter, Veröffentlichungen des Bundesaufsichtsamtes für das Versicherungswesen 2/1995, S. 79-81.
- Institut für Demoskopie Allensbach* (1996): Die Lebensversicherung als Säule der Altersvorsorge, Allensbach 1996.
- Maurer, R., H. Schradin* (1997): Rentendiskussion und Finanzierungssystem – Umlageverfahren und Kapitaldeckungsverfahren in der gesetzlichen Rentenversicherung und der Privaten Leibrentenversicherung, Wirtschaftswissenschaftliches Studium Februar 1997, S. 65-73.
- Meyer, C.-P.* (1999): Boom bei der privaten Rente, Versicherungskaufmann 7/99, S. 12-17.
- Schmähl, W.* (1999): Das Gesamtsystem der Alterssicherung, in: J.-E. Cramer et al., (Hrsg.), Handbuch zur Altersversorgung, Frankfurt am Main 1999, S. 59-83.
- Schmithals, B., E.U. Schütz* (1995): Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik XXII, April 1995, S. 29-69.
- Schwebler, R.* (1988): Rentenversicherung, private, in: *D. Farny* et al., (Hrsg.), Handwörterbuch der Versicherung (HdV), Karlsruhe 1988, S. 649-650.
- Wolfsdorf, K.* (1997): Versicherungsmathematik, Teil 1: Personenversicherung, 2. Aufl., Stuttgart 1997.

## Anhang A: Aktuarielle Grundlagen der Rentenversicherung

Wir betrachten die folgende allgemeine Grundsituation. Ein x-jähriger Versicherungsnehmer (bzw. eine y-jährige Versicherungsnehmerin) schließt gegen einen Einmalbeitrag in Höhe von C eine (sofort beginnende, vorschüssig zahlbare) lebenslängliche Leibrentenversicherung ab. Er erhält dafür im Gegenzug zu den Zeitpunkten  $t = x, x+1, \dots, w$  Rentenzahlungen<sup>17)</sup> der Höhe  $R_0, R_1, \dots, R_{w-x}$ . Dabei bedeute  $w$  (üblicherweise:  $w = 110$ ) das rechnungsmäßige Höchstendalter. Gegeben seien ferner ein Rechnungszins in Höhe von  $i$  ( $q := 1 + i, v := q^{-1}$ ) und eine Sterbetafel mit zugehörigen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  (bzw.  $q_y$ ) sowie den daraus abgeleiteten Größen  ${}_t p_x$ , der t-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen (bzw.  ${}_t p_y$ ).

Der versicherungsmathematische Barwert der Rentenleistungen (BWR) ist dann gegeben durch (in wahrscheinlichkeitstheoretischer bzw. alternativ in aktuarieller Schreibweise):

$$\begin{aligned} BWR(i) &= \sum_{t=0}^{w-x} R_t \cdot {}_t p_x \cdot v^t \\ &= \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{t=0}^{w-x} R_t \cdot D_{x+t} \end{aligned} \quad (A1)$$

Im Falle gleichhoher Rentenleistungen  $R_t \equiv R$  ergibt sich als Spezialfall der Ausdruck

$$BWR(i) = R \cdot \ddot{a}_x, \quad (A2)$$

wobei

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &:= \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot v^t \\ &= \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} \end{aligned} \quad (A3)$$

sowie

$$\ddot{a}_x := \ddot{a}_{x:\overline{w+1-x}|}. \quad (A4)$$

---

17) Wir beschränken uns dabei auf den Fall vorschüssiger jährlicher Rentenleistungen. Für den allgemeinen Fall unterjähriger (typischerweise: monatlicher) Rentenzahlungen vgl. etwa *Wolfsdorf* (1997, S. 142 ff.).

Die Netto-Einmalprämie  $NEP = NPE(i)$  entspricht gerade  $BWR(i)$  und damit ergibt sich – ohne Berücksichtigung von Kosten – die Verrentung des Investitionsbetrages  $C$  zu einer lebenslänglichen konstanten Rente der Höhe  $R = R(i)$  auf der Basis der Lösung der Gleichung  $BWR(i) = C$ , mithin zu

$$R = \frac{C}{\ddot{a}_x}. \quad (A5)$$

Bei Berücksichtigung von Betriebskosten sind die vorstehenden Überlegungen wie folgt zu modifizieren. Dabei sind von Relevanz  $\alpha$ -Kosten bzw.  $\beta$ -Kosten in Promille bzw. in Prozent der Höhe der Brutto-Einmalprämie  $BEP$  sowie  $\gamma$ -Kosten in Prozent der Jahresrente pro Jahr der Rentenbezugszeit. Insgesamt gilt für die Brutto-Einmalprämie damit die Gleichung<sup>18)</sup>  $BEP = NEP + (a + b) \cdot BEP + g \cdot \ddot{a}_x \cdot R$ , mithin

$$BEP = R \cdot \frac{\ddot{a}_x \cdot (1 + g)}{1 - a - b}. \quad (A6)$$

Bei vorgegebenem Kalkulationszins  $i$  führt eine Verrentung des Investitionsbetrages  $C$  damit auf eine lebenslängliche konstante Rente  $R = R(i)$  in Höhe von

$$R = \frac{C \cdot (1 - a - b)}{\ddot{a}_x \cdot (1 + g)}. \quad (A7)$$

---

18) Wir verzichten dabei auf den Ansatz eines Deckungsbeitrages für vertragsfixe Kosten.

## Anhang B: Zur Anwendung der DAV-Sterbetafel 1994 R

Die DAV-Sterbetafel 1994 R<sup>19)</sup> ist auf der Grundlage der  $\bar{q}_x^B$  der Basissterbetafel 2000 und der Trendfunktion  $\bar{F}(x)$  als zweidimensionale Sterbetafel der Form

$$q_x^t = \exp\{-\bar{F}(x) \cdot (t + x - 2000)\} \cdot \bar{q}_x^B \quad (\text{B1})$$

konzipiert. Dabei entspricht  $q_x^t$  der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen Mannes des Geburtsjahrganges t (analog  $q_y^t$  für Frauen).

Bei den durchzuführenden Auswertungen gehen wir dabei zweckmäßigerweise davon aus, daß die interessierende Person eines fixierten Renteneintrittsalters (z.B. 60, 65, 70 Jahre) dieses Alter im Jahr 2000 annimmt. Die relevanten  $q_x$  (bzw.  $q_y$ ) entsprechen dann jeweils den Größen der Basistafel 2000, d.h.  $q_x = \bar{q}_x^B$ .

---

19) Vgl. *Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen* (1995) sowie *Schmithals/Schütz* (1995).

## Anhang C: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten I

Bezeichne  $\{V_R(t); t \geq 0\}$  den stochastischen Prozeß der Wertentwicklung eines zum Zeitpunkt  $t = 0$  investierten Kapitals  $C$ , wobei dem sich akkumulierenden Vermögen jeweils jährlich vorschüssig (d.h. zu den Zeitpunkten  $t = 0, 1, 2, \dots$ ) eine konstante Rentenzahlung der Höhe  $R$  entnommen wird. Es bezeichne im weiteren die Zufallsgröße  $T_x$  die (gestutzte) restliche Lebenszeit eines zum Zeitpunkt 0, dem Investitionszeitpunkt,  $x$ -Jährigen (analog:  $T_y$ ).

Das Ereignis  $V_R(u) = 0$  beinhaltet einen Verzehr des investierten Kapitals zum Zeitpunkt  $t = u$ . Formal interessiert uns der früheste dieser Zeitpunkte<sup>20)</sup> (Ruinzeitpunkt), d.h.

$$t_R = \inf \{ u > 0; V_R(u) = 0 \}. \quad (C1)$$

Offensichtlich gilt  $V_R(u) \leq 0$  für  $u = \tau$ . Der Zeitpunkt  $\tau$  ist ein zufallsabhängiger Zeitpunkt, er ist abhängig vom jeweils konkreten Entwicklungspfad, den der Vermögensprozeß nimmt.

Im Zentrum des Interesses steht die Möglichkeit  $T_x > \tau_R$ , d.h. der Vermögensverzehr ist in einem Zeitpunkt eingetreten, zu dem die betrachtete Person noch lebt. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit des Eintritts dieses Falles von Relevanz, wir bezeichnen diese im weiteren mit  $P_{VVZ}(R)$ , wobei

$$P_{VVZ}(R) := P(T_x > t_R). \quad (C2)$$

Zur Ableitung einer Möglichkeit zur Bestimmung von  $P_{VVZ}$  wenden wir die folgende Überlegung an, die darauf basiert, daß  $T_x$  und  $\tau_R$  ohne Probleme als stochastisch unabhängige Größen angenommen werden können. Es gilt:<sup>21)</sup>

---

20) Der Fall  $\tau_R = \infty$  ist dabei prinzipiell nicht ausgeschlossen, etwa bei Annahme einer sehr geringen Rentenhöhe  $R$ . Auch  $\tau_R = 0$  ist möglich, insbesondere, wenn  $R > C$ .

21) Man beachte  ${}_t p_x = 0$  für  $t > w-x$  sowie  ${}_0 p_x = 1$  und  ${}_1 p_x = p_x$ .

$$\begin{aligned} P(T_x > t_R) &= P(T_x - t_R > 0) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} P(T_x - t > 0 | t_R = t) \cdot P(t_R = t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} P(T_x > t) \cdot P(t_R = t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x \cdot P(t_R = t) \\ &= \sum_{t=0}^{w-x} {}_t p_x \cdot P(t_R = t) . \end{aligned}$$

Schließt man noch zweckmäßigerweise den Fall  $R > C$ , d.h.  $\tau_R = 0$  aus, so ergibt sich insgesamt:

$$P_{VZ}(R) = \sum_{t=1}^{w-x} {}_t p_x \cdot P(t_R = t). \quad (C3)$$

Analog ist der Fall einer y-jährigen Investorin zu behandeln.

Der Vorzug der Beziehung (C3) besteht in der Separation der Sterbegesetzmäßigkeit auf der einen Seite und der Konstellation eines Vermögensverzehrs zu einem festen Zeitpunkt auf der anderen. Die Sterbegesetzmäßigkeit ist durch die DAV-Sterbetafel 1994 R gegeben. Die Wahrscheinlichkeiten  $P(\tau_R = t)$  hingegen müssen im Wege einer Monte-Carlo-Simulation ermittelt werden.

Zuvor ist noch der Prozeß der Vermögensentwicklung unter Berücksichtigung der Entnahme von Rentenzahlungen zu analysieren.

## Anhang D: Analyse des Prozesses der Vermögensentwicklung

Bezeichne wiederum  $\{V_R(t); t \geq 0\}$  den Prozeß der Vermögensentwicklung unter Berücksichtigung vorschüssiger jährlicher Entnahmen der Höhe  $R$ . Das in  $t = 0$  investierte Vermögen habe die Höhe  $C$ . Hieraus folgt:  $V_0 = C - R$ . Gehen wir zusätzlich von einem anfänglichen Ausgabeaufschlag in Höhe von  $100 a_A$  % für Aktienfonds und in Höhe von  $100 a_F$  % für Rentenfonds aus, so steht nur ein Betrag von  $x_A(C - R)/(1 + a_A) + (1 - x_A)(C - R)/(1 + a_F)$  zur Investition zur Verfügung, d.h. der Startwert beträgt in diesem Falle  $V_0 = x_A(C - R)/(1 + a_A) + (1 - x_A)(C - R)/(1 + a_F)$ .

Das am Anfang der Investitionsperiode (nach Entnahme der Rentenzahlung) zur Verfügung stehende Kapital werde mit dem Anteil  $x_A$  ( $0 \leq x_A \leq 1$ ) in einen Aktienfonds investiert und zum komplementären Anteil in einen Rentenfonds. Wir treffen die finanzmathematische Standardannahme, daß die Wertentwicklungen von Aktien- und Rentenfonds einer zweidimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung folgen. Es bezeichne  $I_A(t)$  bzw.  $I_F(t)$  die betreffenden kontinuierlichen Ein-Perioden-Renditen, d.h. für den Prozeß  $\{S_A(t)\}$  der Wertentwicklung des Aktienfonds gilt jeweils

$$S_A(t) = S_A(t - I) \cdot \exp\{I_A(t)\}, \quad (D1)$$

entsprechend gilt für den Prozeß der Vermögensentwicklung des Rentenfonds jeweils

$$S_F(t) = S_F(t - I) \cdot \exp\{I_F(t)\}. \quad (D2)$$

In  $t = 1$  gilt dann

$$\begin{aligned} V_1 &= x_A \cdot V_0 \cdot \exp\{I_A(I)\} + (1 - x_A) \cdot V_0 \cdot \exp\{I_F(I)\} - R \\ &= V_0 \cdot [x_A \cdot \exp\{I_A(I)\} + (1 - x_A) \cdot \exp\{I_F(I)\}] - R, \end{aligned} \quad (D3)$$

allgemein gilt:

$$V_{t+1} = V_t \cdot [x_A \cdot \exp\{I_A(t + I)\} + (1 - x_A) \cdot \exp\{I_F(t + I)\}] - R. \quad (D4)$$

Die Generierung des Pfades des Prozesses der Wertentwicklung des investierten Kapitals kann daher auf Basis der sukzessiven (simultanen) Generierung von Realisationen von  $(I_A(t+1), I_F(t+1))$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , erfolgen. Im Falle einer bivariaten geometrischen Brownschen Bewegung ist bekannt, daß  $(I_A(t), I_F(t))$  unabhängige Realisierungen eines bivariat normalverteilten Zufallsvektors  $(I_A, I_F)$  darstellen. Dessen Simulation wird im folgenden Anhang diskutiert.

## Anhang E: Simulation von korrelierten normalverteilten Zufallsvariablen

Sei  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  ein bivariat normalverteilter Zufallsvektor. Es bezeichne  $\mu_1 = E(X_1)$ ,  $\mu_2 = E(X_2)$ ,  $\sigma_1 = \sigma(X_1)$ ,  $\sigma_2 = \sigma(X_2)$  und  $\rho = \rho(X_1, X_2)$ . Bezeichne ferner

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

den Erwartungswertvektor von  $X$  sowie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_1^2 & r \cdot s_1 \cdot s_2 \\ r \cdot s_1 \cdot s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}$$

die Varianz-Kovarianz-Matrix von  $X$ .

$X$  besitzt dabei die Repräsentation<sup>22)</sup>

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + s_1 \cdot Z_1 \\ m_2 + r \cdot s_2 \cdot Z_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot s_2 \cdot Z_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E1})$$

wobei  $Z_1$  und  $Z_2$  zwei unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen darstellen.

Die (simultane) Generierung einer Realisation  $x_1$  von  $X_1$  sowie  $x_2$  von  $X_2$  kann somit wie folgt durchgeführt werden:

- 1) Generiere nacheinander zwei unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsrealisationen  $z_1$  und  $z_2$ .
- 2) Gewinne  $x_1$  und  $x_2$  aus:

$$\begin{aligned} x_1 &= m_1 + s_1 \cdot z_1, \\ x_2 &= m_2 + r \cdot s_2 \cdot z_1 + \sqrt{1-r^2} \cdot s_2 \cdot z_2. \end{aligned} \quad (\text{E2})$$

Auf diese Art und Weise können sukzessive Realisationen von  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  generiert werden.

---

22) Ausgangspunkt für diese Repräsentation ist die *Cholesky*-Zerlegung der Varianz/Kovarianz-Matrix.

## Anhang F: Identifikation der Parameter

Wir gehen aus von zwei Beobachtungsreihen  $\{s_A(t)\}$  bzw.  $\{s_F(t)\}$  eines Aktien- bzw. Renteninvestments zu äquidistanten Zeitpunkten  $t = 0, 1, \dots, T$  (in den Auswertungen: Jahresdaten). Die Folge der empirischen Renditen auf diskreter Basis ist demzufolge

$$r_A(t) = \frac{s_A(t)}{s_A(t-1)} - 1, \quad t = 1, \dots, n \quad (\text{F1})$$

bzw.

$$r_F(t) = \frac{s_F(t)}{s_F(t-1)} - 1, \quad t = 1, \dots, n. \quad (\text{F2})$$

Auf zeitstetiger Basis (kontinuierliche Renditen) gilt entsprechend:

$$i_A(t) = \ln\left(\frac{s_A(t)}{s_A(t-1)}\right) \quad t = 1, \dots, n \quad (\text{F3})$$

bzw.

$$i_F(t) = \ln\left(\frac{s_F(t)}{s_F(t-1)}\right) \quad t = 1, \dots, n. \quad (\text{F4})$$

Liegt das Datenmaterial in Form von diskreten Renditen vor, so kann mittels der Transformation  $i_A(t) = \ln(1+r_A(t))$  bzw.  $i_F(t) = \ln(1+r_F(t))$  auf zeitstetige Renditen übergegangen werden.

Zur Identifikation der Parameter der zugrundeliegenden zweidimensionalen geometrischen Brownschen Bewegung  $(S_A(t), S_F(t))$  ist von Renditen in kontinuierlicher Form auszugehen, d.h. von  $(l_A(t), l_F(t))$ , wobei  $l_A(t) = \ln(S_A(t)/s_A(t-1))$  bzw.  $l_F(t) = \ln(S_F(t)/s_F(t-1))$ .

Aus den allgemeinen Eigenschaften der (zweidimensionalen) geometrischen Brownschen Bewegung folgt dann, daß  $(l_A(t), l_F(t))$ ,  $t = 1, \dots, T$  stochastisch unabhängige und identisch normalverteilte Zufallsvektoren sind. Die Beobachtungen

$(i_A(t), i_F(t))$  können daher als Stichprobe zu einer bivariaten Normalverteilung mit Erwartungsvektor

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_F \end{pmatrix} \quad (F5)$$

und Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_A^2 & r \cdot s_A \cdot s_F \\ r \cdot s_A \cdot s_F & s_F^2 \end{pmatrix} \quad (F6)$$

angesehen werden. Entsprechend können die betreffenden Parameter durch die nichtparametrischen Schätzgrößen Stichprobenmittelwert, (korrigierte) Stichprobenvarianz bzw. –standardabweichung und Stichprobenkorrelationskoeffizient geschätzt werden.

Im einzelnen gilt:

$$\bar{u}_A := \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T i_A(t), \quad (F7)$$

$$\bar{u}_F := \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T i_F(t), \quad (F8)$$

$$s_A^2 := \frac{1}{T-1} \cdot \sum_{t=1}^T (i_A(t) - \bar{u}_A)^2, \quad (F9)$$

$$s_F^2 := \frac{1}{T-1} \cdot \sum_{t=1}^T (i_F(t) - \bar{u}_F)^2, \quad (F10)$$

sowie

$$r := \frac{\sum_{t=1}^T (i_A(t) - \bar{u}_A) \cdot (i_F(t) - \bar{u}_F)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (i_A(t) - \bar{u}_A)^2 \cdot \sum_{t=1}^T (i_F(t) - \bar{u}_F)^2}}. \quad (F11)$$

Im Rahmen der im Hauptteil dokumentierten Evaluationen auf der Basis des Median-Aktienfonds sowie Median-Rentenfonds gemäß der Daten von *Albrecht/Maurer/Schradin* (1999) führte dies zu den folgenden Werten:

$$u_A = 0,1197, s_A = 0,2111,$$

$$u_F = 0,0738, s_F = 0,0485, r = 0,2691.$$

## Anhang G: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu festen Zeitpunkten

Auf der Basis der Anhänge E und F sind pro Simulationslauf sukzessive Realisationen  $(i_A(1), i_F(1)), \dots, (i_A(t), i_F(t)), \dots$  aus einer bivariat normalverteilten Grundgesamtheit zu generieren. Gegeben den Startwert  $V_0 = v_0$  kann gemäß Anhang D der zugehörige Pfad der Vermögensentwicklung  $v_1 = v_1(i_A(1), i_F(1)), v_2 = v_2(i_A(1), i_F(1); i_A(2), i_F(2)), \dots, v_t = v_t(i_A(1), i_F(1); \dots; i_A(t), i_F(t)), \dots$  gewonnen werden ( $t = 1, \dots, T; T = w-x$ ), wobei allgemein gilt:

$$v_{t+1} = v_t \cdot [x_A \cdot \exp\{i_A(t+1)\} + (1 - x_A) \cdot \exp\{i_F(t+1)\}] - R. \quad (G1)$$

Pro Simulationslauf ist die Simulation zu stoppen, wenn erstmalig  $v_t \leq 0$ .

Die in Anhang C eingeführten Wahrscheinlichkeiten  $P(\tau_R = t)$ ,  $t = 1, \dots, T = w-x$ , d.h. die Wahrscheinlichkeiten für einen Vermögensverzehr zu festen Zeitpunkten ergeben sich dann als Quotient der Anzahl der Simulationsläufe mit Stop in  $t$  und der gesamten Anzahl der Simulationsläufe.

## **Anhang H: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten II**

Gegeben die Wahrscheinlichkeiten  $P(\tau_R = t)$  für einen Vermögensverzehr zu festen Zeitpunkten gemäß Anhang G kann dann auf der Grundlage der Beziehung (C3) des Anhangs C die (totale) Wahrscheinlichkeit  $P_{VZ}(R)$  für einen Vermögensverzehr zu Lebzeiten bestimmt werden.

Neben der Rentenhöhe  $R$  bestimmen die folgenden Einflußfaktoren die Wahrscheinlichkeit  $P_{VZ}(R)$ :

- biometrische Einflußfaktoren (Geschlecht, Sterbetafel, Eintrittsalter)
- Investment-Einflußfaktoren (Portefeuille-Mischung, Dynamik der Entwicklung der Fondsinvestments).